DISSERTATIO ASTRONOMICA

de

ORBITA E TRIBUS RADIIS VECTORIBUS ET ANGULIS COMPREHENSIS INVENIENDA,

Quam,

Consentiente Ampl. Philos. Ordine Lundensi,

PRÆSIDE

JONA BRAG,

Astr. & Ph. Prof. Reg. & Ord.

Pro summis in Philosophia capessendis honoribus,

exhibet

GUSTAVUS CEDERSCHIÖLD,

Nobilis.

In Academia Carolina Die VIII Junii MDCCCXXXII.

P. I.

LONDINI GOTHORUM,

Typis Berlingianis,

MDCCCXXXII.

I.

Problema illud e tribus locis heliocentricis cum radiis vectoribus, sive e tribus radiis vectoribus cum angulis comprehensis, orbitam ellipticam parametro, perihelio & excentricitate definire pluribus gaudet solutionibus, tum syntheticis, tum analyticis. Posterioris generis, ut alias reticeamus, concinnam dedit Cl. Gauss in opere elegantissimo inscripto *Theoria Motus corporum cœlestium*; quem quoque in hac quæstione secutus est Cl. Littrow 1) Discedet nonnihil ab illis nostra explicatio, cum permutatione eliminationum quarundam lemmatumque trigonometricorum cum simplicioribus, tum copiosiori omnino ad rem uberius explicandam demonstrationis adparatu 2).

---

1) Theoria Mot. Corp. Cœlest. Auctore C. F. Gauss. Hamburgi 1809, pag. 86. Theoretische und Practische Astronomie von Littrow. Wien 1821 Zw. Th. pag. 150.

2) Quod Cl. Delambre in *Astronomie Theorique & Pratique* Paris 1814. Tom. II pag. 81, loco non a re nostra alieno, de Celeberrimo laudatæ Theoriæ Auctore habet *"il se contente d'indiquer d'une manière abrégée la démonstration"* et mox *"et laisse au calculateur exercé le soin de démontrer,"* pauloque infra: *"ces calculs paraîtraient sans doute assez difficiles à beaucoup de lecteurs,"* id vere dici nemo facile negaverit. Similiter de eximio opere Littrowiano judicamus, in quo nihil desiderandum videtur præter crebriora in rebus abstrusis & magis reconditis demonstrationum vincula.

Sint r, r', r'', dati vectores, et, ut problema latius patere videatur, r minor, reliquorum vero uterque major semiparametro, ea præterea inter hos ipsos obtinente ratione, ut secundus, seu primo propior r', tertium r'' magnitudine excedat; sit porro angulus m, quem primus vectorum cum secundo efficiat $> 90°$, angulus vero n, quem secundus cum tertio constituat, ita comparatus, ut $m + n > 180°$; quærantur jam, proposito ordine, semiparameter p, anomalia vera v, seu distantia perihelii a loco heliocentrico proximo vectorum r debito, atque exponens rationis excentricitatis e ad semiaxem majorem $a, = \frac{e}{a} = q$

Si abscissæ, e centro ductæ, respective vocentur x, x', x'', e principiis sectionum conicarum erit

$$x' = \frac{a^2 - ar}{e} = e + r \cos v, \text{ sive}$$

$$r \cos v = \frac{a^2 - ar - e^2}{e} = \frac{a}{e}(p - r) = \frac{p - r}{q},$$

parique ratione, eliminatis x' & x'',

$$r'\Big(-\cos(v + m)\Big) = \frac{r' - p}{q}, \text{ sive}$$

$$r' \cos\Big(v' + m\Big) = \frac{p - r'}{q}; \text{ atque}$$

$$r''\Big(-\cos\Big(v + s\Big) = \frac{r'' - p}{q}, \text{ posito } m + n = s, \text{ sive}$$

$$r'' \cos\Big(v + s\Big) = \frac{p - r''}{q}.$$

Hinc

$$q = \frac{p - r}{r \cos v} = \frac{p - r'}{r' \cos(v + m)} = \frac{p - r''}{r'' \cos(v + s)}$$

Quia igitur, quibuscumque anomaliis, vel longitudinibus, assumtis, $\cos(v+m) = \frac{r(p-r')}{r'(p-r)} \cos v = M \cos v$,

posito $\frac{r(p-r')}{r'(p-r)} = M$; erit

$$\cos v \cos m - \sin v \sin m = M \cos v, \text{ et}$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{\cos m - M}{\sin m}.$$

Eodem modo prodibit

$$\operatorname{tang} v = \frac{\cos s - N}{\sin s}, \text{ posito } \frac{r(p-r'')}{r''(p-r)} = N.$$

Unde

$$\sin s \cos m - \cos s \sin m = M \sin s - N \sin m, \text{ et}$$

$$\sin n = M \sin s - N \sin m = \frac{r(p-r')}{r'(p-r)} \sin s$$

$$- \frac{r(p-r'')}{r''(p-r)} \sin m.$$

Sublatis divisoribus habebimus

$$p = \frac{(\sin n + \sin m - \sin s) rr'r''}{r'r'' \sin n + rr' \sin m - rr'' \sin s} \quad \alpha)$$

$$= \frac{\sin n + \sin m - \sin s}{\frac{\sin n}{r} + \frac{\sin m}{r''} - \frac{\sin s}{r'}}, \quad \beta)$$

generalis formula, cujus numeratoris, pariter ac denominatoris, termini vel omnes, ut nostra dabit positio, vel duo saltem positivi erunt.

II.

Quod ad numeratorem β, seu factorem complexum

numeratoris α, attinet, duobus modis transformari potest, quorum altero aeque fere ac antea, altero magis ad calculos subducendos idoneus reddetur.

1:mo $\sin n + \sin m - \sin(m+n) = \sin n + \sin m - \sin m \cos n - \cos m \sin n = \sin n(1-\cos m) + \sin m (1-\cos n) = 2\left(\sin n \sin\frac{m^2}{2} + \sin m \sin\frac{n^2}{2}\right)$

2:o $\sin n + \sin m - \sin(m+n) = 2\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2} + \sin m - \sin m \cos n - 2\cos m \sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2} = 2\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2} + 2\sin m \sin\frac{n}{2}\sin\frac{n}{2} - 2\cos m \sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2} = 2\sin\frac{n}{2}\left(\cos\frac{n}{2} - \cos\left(\frac{n}{2}+m\right)\right)$;

quare, cum semper sit $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \times \sin b$, hic vero $a = \frac{n}{2} + \frac{m}{2}$, $b = \frac{m}{2}$, erit

$$\sin n + \sin m - \sin s = 4\sin\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\frac{s}{2}.$$

Prodiisset quoque $\widehat{2}$ ex $\widehat{1}$ hoc modo:

$$2\left(\sin n \sin\frac{m^2}{2} + \sin m \sin\frac{n^2}{2}\right) = 4\sin\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\frac{m}{2} + 4\sin\frac{m}{2}\cos\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n}{2} = 4\sin\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\left(\frac{m+n}{2}\right) = 4\sin\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\frac{s}{2}$$

Commutationem $\widehat{2}$, ut videtur, primus exhibuit Cl. Gauss & post illum Delmbre, Littrow aliique. Omissam

fere ab Auctore demonstrationem primis trigonometriæ regulis vindicavimus.

Assumto novo numeratore, habebitur

$$p = \frac{4\, r r' r'' \left(\sin\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\frac{s}{2}\right)}{r' r'' \sin n + r r' \sin m - r r'' \sin s} \text{ sive}$$

$$p = \frac{4 \sin\frac{n}{2}\sin\frac{m}{2}\sin\frac{s}{2}}{\frac{\sin n}{r} + \frac{\sin m}{r''} - \frac{\sin s}{r'}};$$

quæ quidem expressio valoris p omnium erit ad calculandum aptissima.

Si tria illa loca orbitæ ellipticæ, seu extremitates vectorum, vocentur l, l', l'' respective, et Solis S, erit, quoties $n + m < 180$, $\triangle\, l l' l'' = \triangle\, l' S l'' + \triangle\, l S l' - \triangle\, l S l''$; in qua tamen æquatione quoties $(n + m) > 180°$ uterque vero $< 180°$, existet ultimus posterioris membri terminus positivus; quoties $n > 180$, primus negativus, quoties $m > 180$, secundus negativus; quemadmodum e rite constructa & variata figura facile adparebit. Est autem $\triangle\, l' S l'' = \frac{r'' \times r' \sin n}{2}$, $\triangle\, l S l' = \frac{r' \times r \sin m}{2}$ et $\triangle\, l S l'' = \frac{r'' \times r \sin s}{2}$; ideoque $2 \triangle\, l l' l'' = r' r'' \sin n + r r' \sin m - r r'' \sin s$ = denominatori formulæ p (α), signis eadem lege variantibus.

Cum vero $2 \triangle\, l l' l''$ etiam $= l l'' \times l' l \sin l' l l''$, $= l l'' \times l' l'' \sin l' l'' l$, sequitur, vectoribus parum inter

se distantibus, denominatorem hunc quantitatem fore perparvam tertii ordinis, adeoque, ut Cl. Gauss observat, in hoc casu, non tutissimam esse per parametrum viam ad eruendas orbitæ dimensiones.

Invento p, prodibit v per formulam jam elicitam:

$$\text{tang}\, v = \frac{\cos m - M}{\sin m} = \cot m - \frac{r(p - r')}{r'(p - r)} \text{cosec}\; m$$

Si, ut posuimus, vectores, a perihelio computando, ordine r, r' r'' se excipiant, erit, signum tangentis, quoties $r < p$, si $r' > r$, positivum, si $r > r'$, negativum; quoties vero $r > p$, si $r' > r$, negativum, si $r > r'$, positivum.

Cognito v, invenietur etiam

$$q = \frac{e}{a} = \frac{p - r}{r \cos v},$$

Est autem

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a} = a - qe = a - q^2 a = a(1 - q^2),$$

unde

$$a = \frac{p}{1 - q^2}$$

Denique emerget

$$e = a \times q = \frac{pq}{1 - q^2}.$$

Demonstratio Gaussiana formulæ p, ope elegantissimi a se (pag. 82) allati theorematis trigonometrici: $\cos A \sin(C - B) + \text{Cos}\, B \sin(A - C) + \cos C \sin(B - A) = O$; ubi, ex nostra notatione, $A = v$, $B = v + m$, et $C = v + m + n = v + s$, atque hinc $C - B = n$, $A - C = m + n, = s$, $B - A = m$, haud brevior nostra videbitur, si memineris per hanc jam inventum esse v da-

to p, per illam autem non item. Quæretur igitur postea, adminiculo formularum paginae 83; $g \cos (A - P) = a$ et $g \sin (A - P) = a \cot (B - A) - \frac{b}{\sin (B - A)}$ 3) ubi $A - P = (v + m) - m = v$, et $B - A = (v + 2m) - (v + m) = m$. Cæterum quantumvis elegantes et ingeniosæ hæ regulæ sint, non dubitamus fore plerosque, qui, ne memoria nimiis obruatur formulis, iisque nec ortu suo, nec usu, semper tam sponte se offerentibus, demonstrationem e simplicioribus profectam, vel paullo longiorem, & hic & alibi, anteferant. Amat humanum ingenium intueri magis, quam meminisse. Has fere credimus fuisse caussas, cur hoc, et plura ejusmodi problemata, et ante et post cognitas cl. viri methodos, ratione, nostræ non dissimili, fuerint tractata. Nec tamen negamus ad tot praeclara, uno volumine comprehendenda, usum ejusmodi regularum esse eximium.

Notatio Gaussiana, v. c. numeratoris $p = \sin (N'' - N') - \sin (N'' - N) + \sin (N' - N)$, ubi $N'' - N' = n$, $N'' - N = m + n = s$ et $N' - N = m$, transformati mox in $2 \sin \frac{1}{2} (N'' - N') \cos \frac{1}{2} (N'' - N') - 2 \sin \frac{1}{2} (N'' - N') \cos (\frac{1}{2} N'' + \frac{1}{2} N' - N)$ et dehinc in $4 \sin \frac{1}{2} (N'' - N') \sin \frac{1}{2} (N'' - N) \sin \frac{1}{2} (N' - N)$, e communi et pro lubito in plano orbitæ adsumto longitudinum initio profecta, si cum nostra conferatur, certe minus commoda. Sic $(\frac{1}{2} N'' + \frac{1}{2} N' - N)$ nihil aliud est, quam hic $m + \frac{n}{2}$ Neque, ut nostra jam ostendimus substitutione, ad ap-

3) Ne confundes cum semiparametro, pro p scripsimus g.

plicationem lemmatum illorum trigonometricorum magis erit necessaria 4).

Formula p valet etiam pro hyperbolica via corporis cœlestis. E natura enim hujus lineæ erit

$$x = \frac{ar + a^2}{e} = e - r \cos v, \text{ unde}$$

$$\frac{e^2 - a^2 - ar}{e} = r \cos v, \text{ sive}$$

$$r \cos v' = \frac{ap - ar}{e} = \frac{a}{e}(p - r) = \frac{p - r}{q};$$

similiter $r' \cos (v + m) = \frac{p - r'}{q}$, plane ut in ellipsi. Quo igitur solo, et, ut ostensum est, communi, valore quantitatis $r \cos v$ cum totum robur formulæ p nitatur, hæc quoque ipsa ad utramque curvam pertinebit.

Respicient, iisdem ex caussis, formulæ tangentis v et constantis q etiam hyperbolam.

Est autem in hyperbola

$$p = \frac{e^2 - a^2}{a} = qe - a = q^2 a - a = (q^2 - 1)\, a, \text{ sive}$$

---

4) Notatio Delambriana, libro et tomo citato, pag. 129 & seqq., eadem est ac Gaussiana, permutatis litteris. Convenit tamen nostra multo magis verbis ipsius pag. 133. — Cette *formule élégante de M. Gauss* (formulam p puta) *ne suppose, comme on voit, que les différences de longitudes* et *non les longitudes absolues.* Scilicet hoc problemate, per se geometrico, ad Astronomiam translato, extremitates vectorum primum fient longitudines heliocentricæ, hac vel illa ratione cognitæ, hoc vel illo e puncto computatæ.